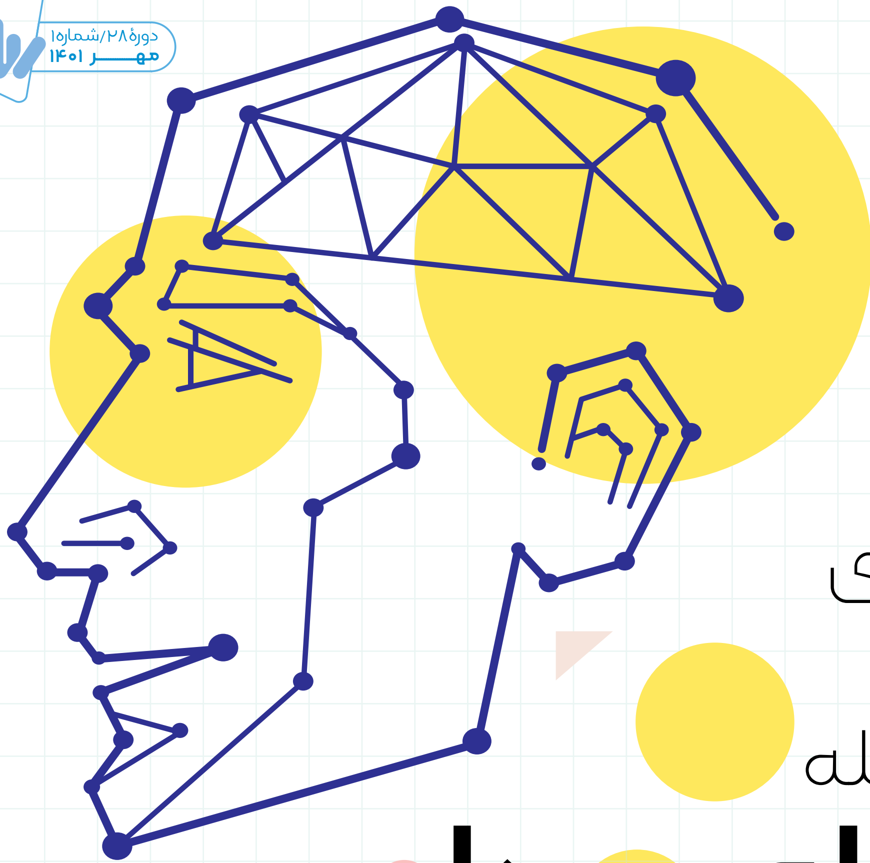
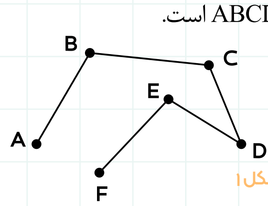


محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله
چندضلعی‌ها

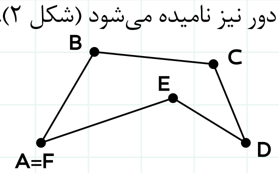
در هشت شمارهٔ قبلی این مجله مفهوم‌های اولیهٔ هندسه را که ساختار هندسه بر آن‌ها بنا می‌شود، بررسی کردیم. این مفهوم‌های اساسی عبارت بودند از: خط، پاره‌خط، نیم‌خط، زاویه، اندازهٔ پاره‌خط، اندازهٔ زاویه و انواع زاویه‌ها. خط‌های موازی و خط‌های عمود و ویژگی‌های آن‌ها نیز از مفاهیم اصلی هندسه هستند که بررسی کردیم. سپس، اصلی به نام «اصل زاویه‌های متبادل» را بیان کردیم که به کمک آن توانستیم ثابت کنیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است. اکنون می‌خواهیم بخش دوم مفهوم‌های هندسی را شروع کنیم. این بخش که بر مبنای بخش‌های قبلی استوار است، از چندضلعی‌ها شروع می‌شود. هر چند یکی از ساده‌ترین چندضلعی‌ها را که مثلث است، قبلاً تعریف کردیم، اما در اینجا تعریفی کلی از چندضلعی بیان خواهیم کرد که شامل مثلث هم می‌شود. سپس یکی از کاربردی‌ترین مفهوم‌های هندسه را که هم‌نهشتی مثلث‌هاست، مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد. وقتی هم‌نهشتی یا همان انطباق مثلث‌ها را یاد بگیریم، با دنیای وسیعی از حل مسئله در هندسه روبه‌رو خواهیم شد.

به همین دلیل در عنوان این مقاله «حل مسئله» را می‌بینید. در واقع هندسه را با تکیه بر حل مسئله به پیش خواهیم برد. ساختمان چندضلعی‌ها از پاره‌خط‌ها تشکیل شده است. در واقع، چندضلعی‌ها که حداقل شامل سه پاره‌خط هستند، از دنبال هم چیدن این پاره‌خط‌ها پدید می‌آیند. نقطه‌های A، B، C، D، E و F در یک صفحه مفروض‌اند (شکل ۱). این نقطه‌ها را به همین ترتیب که نام می‌بریم به هم متصل می‌کنیم. در این صورت مسیری را داریم که A یک سر آن و نقطهٔ F سر دیگر آن است و آن را به‌صورت ABCDEF نشان می‌دهیم. مسیر FEDCBA همان مسیر ABCDEF است.



شکل ۱

در واقع روی هر مسیر می‌توانیم از یک سر آن شروع و از روی هر پاره‌خط فقط یک بار عبور کنیم تا به سر دیگر برسیم، و برعکس. اکنون اگر ابتدای یک مسیر به انتهای آن وصل شود، مسیر را «بسته» می‌نامند. ABCDEFA یک مسیر بسته است. این مسیر بسته یک دور نیز نامیده می‌شود (شکل ۲).

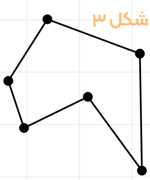


شکل ۲

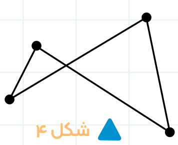
در صفحه در هر مسیر بسته، هر پاره‌خط فقط با دو پاره‌خط دیگر، در دو سر خود، نقطهٔ مشترک دارد.

اکنون می‌توانیم چندضلعی را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

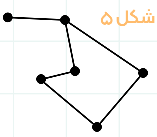
تعریف: در صفحه اگر یک مسیر بسته خودش را قطع نکند و هر دو پاره‌خط متوالی هم روی یک خط نباشند، آن را چندضلعی می‌نامند.



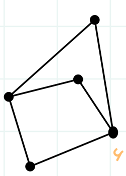
شکل ۳



شکل ۴



شکل ۵



شکل ۶

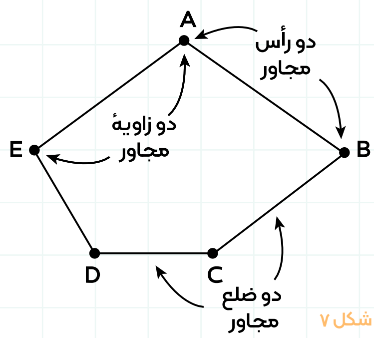
بین شکل‌های ۳ تا ۶، فقط شکل ۳ چندضلعی است. در واقع از روی هر نقطهٔ چندضلعی می‌توانیم شروع به حرکت کنیم و از هر نقطه روی پاره‌خط‌ها و هر رأس یک و فقط یک بار عبور کنیم و دوباره به نقطهٔ شروع برسیم. در شکل‌های ۳ تا ۶ این ویژگی را آزمایش کنید. می‌توانیم بدون استفاده از مسیر نیز چندضلعی را تعریف کنیم، اما تعریف کمی طولانی‌تر می‌شود.

تعریف: nضلعی شکلی در صفحه شامل n (n≥۳) پاره‌خط متوالی است، هرگاه:

۱. هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقطه‌های انتهایی یا دو سر خودش قطع کند.

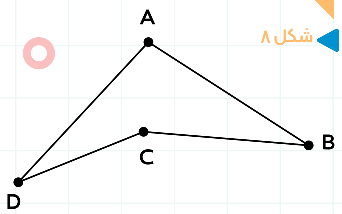
۲. هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

هر یک از این پاره‌خط‌ها را یک ضلع چندضلعی می‌نامند. هر دو ضلع را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع همسایه یا مجاور می‌نامند. نقطهٔ مشترک «رأس چندضلعی» نام دارد. بنابراین هر چندضلعی با تعداد ضلع‌ها یا رأس‌هایش شناخته می‌شود؛ مثل سه‌ضلعی که مثلث است. هر زاویه را که رأس آن روی رأس چندضلعی و دو ضلع آن شامل دو ضلع چندضلعی است، زاویهٔ چندضلعی می‌نامند. در شکل ۷ هر یک از زاویه‌های $\angle ABC$، $\angle BCD$، $\angle CDE$، $\angle DEA$ و $\angle EAB$ یک زاویهٔ پنج‌ضلعی ABCDE هستند. برای ساده بودن گاهی آن‌ها را با حرف خود رأس بیان می‌کنیم. پس هریک از این زاویه‌ها را به‌ترتیب به‌صورت $\angle A$، $\angle B$، $\angle C$، $\angle D$ و $\angle E$ نیز نشان می‌دهیم.



شکل ۷

هر دو زاویهٔ چندضلعی را که یک ضلع چندضلعی در هر دو مشترک است، دو زاویهٔ مجاور یا همسایه می‌نامند. $\angle A$ و $\angle B$ و همچنین $\angle A$ و $\angle E$ مجاور هستند. در چهارضلعی شکل ۸ زاویه‌های آن را بنویسید و رأس هرکدام و ضلع‌هایی از چندضلعی را که روی ضلع‌های این زاویه‌ها هستند، مشخص کنید.



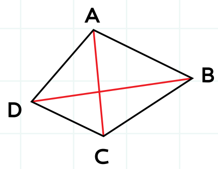
شکل ۸

قطر در چندضلعی

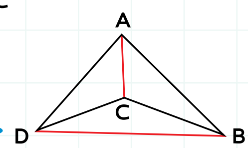
در هر چندضلعی، قطر پاره‌خطی است که دو سر آن روی دو رأس غیرمجاور چندضلعی قرار دارند.

آیا می‌توانید با تعریف قطر استدلال کنید که چرا مثلث قطر ندارد؟

در چندضلعی‌های شکل‌های ۹ و ۱۰، پاره‌خط‌های $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ قطر هستند.

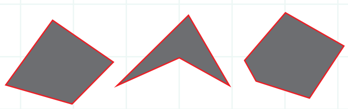


شکل ۹



شکل ۱۰

مشاهده می‌کنیم که در شکل ۹ دو قطر درون چهارضلعی یکدیگر را بریده‌اند. اما در شکل ۱۰ چنین نیست. حتی یک قطر به جز دو سر آن بیرون چندضلعی واقع است. تا اینجا درون و بیرون چندضلعی را هنوز تعریف نکرده‌ایم. به‌طور غیررسمی، مجموعه نقطه‌هایی را که در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ سایه‌زده شده‌اند درون چندضلعی می‌نامیم. به‌طور شهودی، درون چندضلعی مجموعه نقطه‌هایی از صفحهٔ چندضلعی است که توسط ضلع‌های چندضلعی محدود شده‌اند.



شکل ۱۱ شکل ۱۲ شکل ۱۳

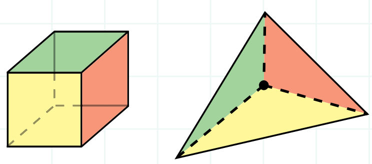
اگر درون به‌درستی تعریف شود، کاربرد خوبی در هندسه دارد و آن تعریف ناحیه‌های چندضلعی است.

تعریف: مجموعه نقطه‌های درون و روی چندضلعی را ناحیهٔ چندضلعی می‌نامند.

نباید ناحیه‌های چندضلعی را با خود چندضلعی اشتباه کنیم. خود nضلعی مجموعه‌ای از نقطه‌های nپاره‌خطی هستند که ضلع‌ها نامیده می‌شوند، اما ناحیهٔ چندضلعی مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های روی چندضلعی و درون چندضلعی با هم هستند. ناحیه‌های چندضلعی در هندسه بسیار اهمیت دارند.

۱. وقتی مفهوم مساحت را در هندسه تعریف می‌کنیم، در اساس مساحت روی ناحیه‌های چندضلعی تعریف می‌شود. وقتی از مساحت مثلث یا مساحت مستطیل حرف می‌زنیم، در واقع همان مساحت ناحیهٔ مثلث یا ناحیهٔ مستطیل است، اما برای سادگی با همان مساحت مثلث یا مستطیل بیان می‌شود. در واقع این ناحیه‌های چندضلعی هستند که با شرایطی می‌توانیم عددهای حقیقی مثبتی را به آن‌ها نظیر کنیم و مساحت آن ناحیه را به‌دست آوریم. در فرصت‌های بعدی این موضوع را بیشتر توضیح می‌دهیم.

۲. ناحیه‌های چندضلعی در شکل‌های فضایی کاربرد دارند. از دوران ابتدایی با شکل‌هایی مانند هرم (شکل ۱۴) و مکعب (شکل ۱۵) و غیره آشنایی دارید که آن‌ها را چندوجهی می‌نامند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:



شکل ۱۴ شکل ۱۵

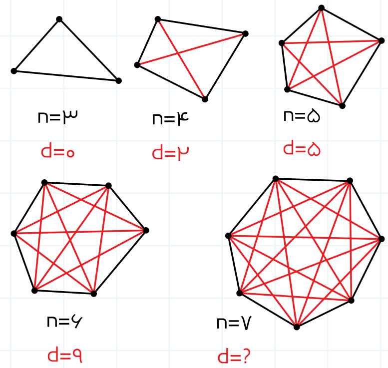
تعریف: چندوجهی شامل چهار یا تعداد بیشتری از ناحیه‌های چندضلعی است که از همه طرف به قسمتی از فضا محصور است. هر دو ناحیهٔ چندضلعی حداکثر در یک ضلع مشترک‌اند و اشتراک هر دو ناحیه فقط روی رأس‌ها و ضلع‌هاست.

این بخش را نیز بعداً به‌طور مفصل بررسی خواهیم کرد. فقط در اینجا خواستیم کاربردی از ناحیه‌های چندضلعی را بیان کنیم. ساده‌ترین چندوجهی، چهاروجهی است که از چهار ناحیهٔ مثلثی تشکیل شده است.

اکنون که با چندضلعی‌ها و ناحیه‌های آن‌ها آشنا شدیم، دوباره به خود چندضلعی‌ها برمی‌گردیم و می‌خواهیم تعداد قطرهای هر چندضلعی را محاسبه کنیم.

طرح مسئله

چگونه می‌توانید تعداد قطرهای هر nضلعی (شکل ۱۶) را محاسبه کنید؟



شکل ۱۶

وقتی تعداد ضلع‌ها کم باشد، به سادگی می‌توانیم تعداد قطرها را بشماریم، اما وقتی تعداد ضلع‌ها بیشتر می‌شوند، کار شمردن هم سخت‌تر می‌شود. مثلاً وقتی n=۷ و حتی n=۸ باشد نیز شمردن ساده نیست. اکنون باید به دنبال روشی برای شمردن تعداد قطرها در هر nضلعی باشیم. به این روش‌ها می‌توانیم نام ویژه‌ای بدهیم: «شمارش بدون آنکه بشماریم!»

روش اول: روش استقرایی

در کل ریاضی مسئله‌های فراوانی در رابطه با شمردن وجود دارند. مثلاً، با رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۵ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟ مسلم است که نوشتن این عددها کار ساده‌ای نیست، اما روش‌هایی وجود دارند که می‌توانیم بدون آنکه همهٔ این عددها را بنویسیم و بشماریم، تعداد آن‌ها را شمارش کنیم. این روش‌ها به روش‌های شمارش و ترکیبیاتی معروف‌اند. در اینجا می‌خواهیم یک روش شمارش برای شمردن تعداد قطرهای هر چندضلعی بیان کنیم.

اولین نکته‌ای که در شمردن تعداد قطرها باید در نظر داشته باشیم این است که وقتی از یک رأس، مثلاً A، به رأسی مانند D خطی رسم می‌کنیم، یک قطر رسم شده است. حال اگر دوباره از D به A وصل کنیم، همان قطر قبلی است. یعنی اگر شمارش ما به‌گونه‌ای باشد که تعیین نکنیم کدام رأس را به کدام رأس متصل کرده‌ایم، قطرها دو بار شمارش می‌شوند. پس هر تعداد را که پیدا کردیم، باید بر دو تقسیم کنیم. آنچه در شکل ۱۶ مشاهده می‌کنیم، در جدول ۱ نوشته‌ایم. سعی می‌کنیم الگویی پیدا کنیم. با توجه به توضیح بالا تعداد قطرها هرچه محاسبه شده باشد، باید بر دو تقسیم شود. پس هر یک از عددهای سطر دوم جدول بر

nتعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	۷	۸
dتعداد قطرها	۰	۲	۵	۹	۱۴	۲۰
تعداد قطرها به‌صورت $\frac{2d}{2}$	$\frac{۰}{۲}$	$\frac{۴}{۲}$	$\frac{۱۰}{۲}$	$\frac{۱۸}{۲}$	$\frac{۲۸}{۲}$	$\frac{۴۰}{۲}$
تعداد قطرها بر حسب جداکردن nتعداد ضلع‌ها	$\frac{۳×۰}{۲}$	$\frac{۴×۱}{۲}$	$\frac{۵×۲}{۲}$	$\frac{۶×۳}{۲}$	$\frac{۷×۴}{۲}$	$\frac{۸×۵}{۲}$
تعداد قطرها بر حسب الگویی از n در یک عدد	$\frac{۳×(۳-۳)}{۲}$	$\frac{۴×(۴-۳)}{۲}$	$\frac{۵×(۵-۳)}{۲}$	$\frac{۶×(۶-۳)}{۲}$	$\frac{۷×(۷-۳)}{۲}$	$\frac{۸×(۸-۳)}{۲}$

جدول ۱

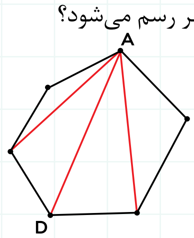
دو تقسیم شده‌اند و آن‌ها را به حالت اولی می‌نویسیم. اکنون می‌دانیم که این تعداد باید بر حسب رابطه‌ای از تعداد ضلع‌ها باشد. پس n تعداد ضلع‌ها را آزمایش می‌کنیم. سعی می‌کنیم صورت کسرها را بر حسب n تعداد ضلع‌ها ضرب در هر عدد دیگری که در صورت به‌وجود می‌آید، بنویسیم.

مشاهده می‌کنیم که اگر n، تعداد ضلع‌ها باشد، n-۳ عدد ضرب‌شده در n است. بنابراین حدس می‌زنیم که تعداد قطرها در هر nضلعی از رابطهٔ $d_n = \frac{n(n-۳)}{۲}$ به دست می‌آید. البته در اینجا چیزی را ثابت نکردیم، فقط با یک روند الگویابی توانستیم به این رابطه برسیم. این روش را «روش استقرایی» نیز می‌خوانند، یعنی ما براساس رابطه‌ای که بین تعدادی از حالت‌های اولیه پیدا می‌کنیم، رابطهٔ کلی را حدس می‌زنیم. البته شاید روش ساده‌تری برای این مسئله وجود داشته باشد.

اکنون سعی می‌کنیم، شما را با روش دیگری از حل این مسئله آشنا کنیم که می‌توانیم از آن در مسئله‌های مشابه استفاده کنیم.

روش دوم: حل مسئله

شکل ۱۷ یک شش‌ضلعی است. از هر رأس آن چند قطر رسم می‌شود؟



شکل ۱۷

اکنون شش رأس داریم. از هر شش رأس چند قطر رسم می‌شود؟ پاسخ ۶×۳ قطر است. آیا این تعداد واقعی است؟ خیر. قبلاً نیز توضیح دادیم، وقتی دو رأس غیرمجاور مانند A و D را انتخاب می‌کنیم، $\overline{AD}$ و $\overline{DA}$ یک قطر هستند. پس این تعداد را باید بر ۲ تقسیم کنیم؛ یعنی $۹ = \frac{۶×۳}{۲}$.

اکنون فرض کنید یک nضلعی (n≥۳) داشته باشیم. فکر می‌کنید از هر رأس nضلعی چند قطر می‌توانیم رسم کنیم؟ به تعریف قطر برمی‌گردیم: از n رأس یک رأس را انتخاب می‌کنیم.

از این رأس طبق تعریف قطر به دو رأس مجاور نمی‌توانیم وصل کنیم. پس این رأس انتخاب‌شده را به n-۳ رأس می‌توانیم وصل کنیم. بنابراین از هر رأس nضلعی n-۳ قطر رسم می‌شود. پس اگر هر n رأس را انتخاب کنیم، از این n رأس n(n-۳) قطر رسم می‌شود. اما هر قطر دو بار حساب شده است، پس تعداد را بر دو تقسیم می‌کنیم، بنابراین:

تعداد قطرها در هر nضلعی برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

نشان دهید تنها یک nضلعی وجود دارد که تعداد قطرهای آن با تعداد ضلع‌های آن برابر است.

فعالیت: n نقطهٔ دلخواه و متمایز در صفحه داریم. با چند پاره‌خط می‌توانیم این n نقطه را به هم متصل کنیم؟

می‌توانید از روش محاسبهٔ تعداد قطرها در چندضلعی الگو بگیرید. از هر نقطه به چند نقطهٔ دیگر می‌توانید وصل کنید؟ پس در کل با این روش تعداد پاره‌خط‌ها چقدر است؟

باید به جواب $\frac{n(n-۱)}{۲}$ برسید.

اکنون تعداد قطرهای یک nضلعی را با تعداد ضلع‌ها جمع کنید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟ چه ارتباطی بین این دو مسئله وجود دارد؟

مسئلهٔ سومی را مطرح می‌کنیم: ۱۰ نفر در یک میهمانی شرکت کرده‌اند. هر فرد با بقیهٔ افراد دست می‌دهد. تعداد دست‌دادن‌های این ۱۰ نفر چقدر است؟ به‌طور کلی در یک میهمانی n نفر شرکت کرده‌اند. هر نفر با بقیهٔ افراد دست می‌دهد. تعداد دست‌دادن‌ها چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین این مسئله و دو مسئلهٔ قبلی برقرار است؟